Quadratische Gleichungen

Lösung durch Äquivalenzumformung

klassische Variante

Grundsätzlich unterscheidet man drei Fälle:

Parabel schneidet x-Achse
⇨ zwei Nullstellen

Parabel berührt x-Achse
⇨ eine Nullstelle

Parabel schneidet x-Achse nicht
⇨ keine Nullstelle(n)

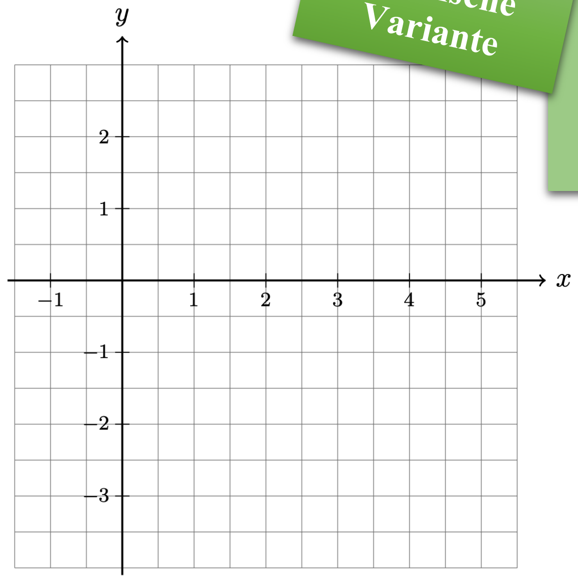
Bestimmen Sie zeichnerisch die Nullstellen der quadratischen Funktion

$$y = 0{,}5 \cdot (x - 2)^2 - 3$$

Als Nullstellen erhält man (auf eine Nachkommastelle abgelesen):

$x_1 \approx$ ________

$x_2 \approx$ ________



Zeichne den Graphen der Funktion in das KOSY …

… und lies die Nullstellen aus der Zeichnung ab.

Um die Nullstellen rechnerisch zu bestimmen, setzt man den Funktionsterm *„gleich Null“*.

Merke:

Für die Berechnung der Nullstellen einer Funktion wird der Funktionsterm *„gleich Null“* gesetzt. $y = 0$

$$0{,}5 \cdot (x - 2)^2 - 3 = 0$$

Diese Art von Gleichung bezeichnet man als ______________________________

__________________________, weil in ihr die Variable im Quadrat enthalten ist.

Durch Äquivalenzumformung erhält man:

$$0{,}5 \cdot (x - 2)^2 - 3 = 0 \qquad | + 3$$

____________________________ $| : 0{,}5$

____________________________ $| \sqrt{\ }$

Stelle nun die Gleichung entsprechend der vorgegebenen Äquivalenzumformungen um.

Die Besonderheit der quadratischen Gleichung ist, dass es hier zwei Lösungen gibt, die die Gleichung erfüllen: eine **positive** und eine **negative**. Der Grund dafür liegt in der Umkehrung des *Radizierens* (*Wurzelziehens*), dem *Quadrieren*: weil nämlich **$-\sqrt{6}$ quadriert** die gleiche Zahl ergibt wie **$+\sqrt{6}$ quadriert**.

$x - 2 = -\sqrt{6} \quad \vee \quad x - 2 = +\sqrt{6}$

$x = -\sqrt{6} + 2 \quad \vee \quad x =$ ______________

$x_1 \approx$ ________ $\quad \vee \quad x_2 \approx$ ________

____

Das Zeichen „v“ bedeutet „oder“.

Auf zwei Nachkommastellen gerundet.“

$$-2 \cdot (x+1{,}5)^2 + 8 = 0 \qquad |-8$$

$$\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \qquad |\_\_\_\_\_$$

$$\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ = 4 \qquad |\_\_\_\_\_$$

$$x + 1{,}5 = -\sqrt{4} \quad \vee \quad x + 1{,}5 = \_\_\_\_\_\_$$

$$x = -\sqrt{4} - 1{,}5 \quad \vee \quad x = \_\_\_\_\_\_\_\_$$

$$x_1 \approx \_\_\_\_\_\_ \quad \vee \quad x_2 \approx \_\_\_\_\_\_$$

$$\mathbb{L} = \{\ \_\_\_\_\_\ ;\ \_\_\_\_\_\ \}$$

Falls du mit der Aufgabe Schwierigkeiten hast, schaue auf der Vorderseite des Arbeitsblatts nach …

… am Schluss: Lösungsmenge nicht vergessen

1. Bestimmen Sie die Nullstellen folgender Funktionen auf die gleiche Weise (auf zwei Nachkommastellen gerundet):

a) $y = -3 \cdot (x-2)^2 + 3$ c) $y = -0{,}25 \cdot (x+2{,}5)^2 + 4$

b) $y = 2 \cdot (x+3{,}5)^2 - 10$ d) $y = \frac{2}{3} \cdot (x-1)^2 - 3$

… und nun ganz ohne Hilfe.

2. Folgende Funktionen haben keine zwei Nullstellen, sondern lediglich **eine** bzw. **gar keine**. Weisen Sie dies rechnerisch auf die gleiche Weise wie oben nach.

a) $y = -2 \cdot (x+1{,}5)^2$ c) $y = -0{,}25 \cdot (x+1)^2 - 2$

b) $y = \frac{1}{3} \cdot (x+3{,}5)^2 + 10$ d) $y = \frac{1}{2} \cdot (x-2)^2$

Überlege: Wie muss eine Parabel im KOSY liegen, dass sie nur eine oder gar keine Nst. hat? Fertige zur Veranschaulichung eine Skizze an.

3. Etwas komplizierter ist die Berechnung von Nullstellen, wenn die Funktionsgleichung **nicht in der Scheitel(punkts)form** vorliegt, sondern in der **allgemeinen Form.**
   In diesem Fall wird die quadratische Funktion zuerst durch _______________

   _______________________________ auf Scheitel(punkts)form gebracht.

   Anschließend verfährt man wie oben.

a) $y = 2x^2 - 4x + 1$ c) $y = -2x^2 - 4x - 2$

b) $y = -0{,}5x^2 + 2x$ d) $y = x^2 - 2x + 3$

Hausaufgabe: Das Arbeitsblatt fertig machen.